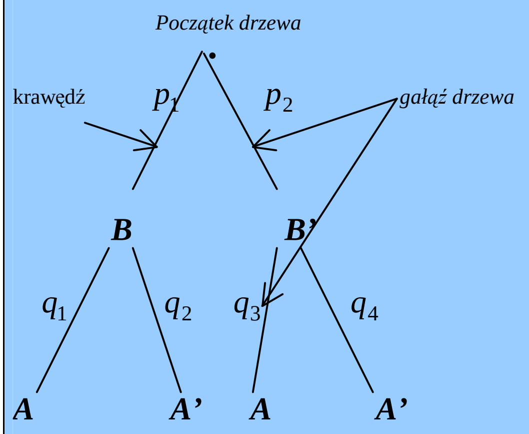
## 12. 4. DOŚWIADCZENIA WIELOETAPOWE

**Drzewem stochastycznym** nazywamy graf ilustrujący przebieg wieloetapowego doświadczenia losowego. Wierzchołkom drzewa stochastycznego przyporządkowane są wyniki poszczególnych etapów doświadczenia, a krawędziom prawdopodobieństwa uzyskania tych wyników. Suma prawdopodobieństw przyporządkowanych krawędziom wychodzącym z tego samego wierzchołka jest równa 1.

### Przykład drzewa doświadczenia dwuetapowego




***B, B'*** – dwa możliwe wyniki w pierwszym etapie doświadczenia

***A, A'*** – dwa możliwe wyniki w drugim etapie doświadczenia

$p_1$ - prawdopodobieństwo otrzymania wyniku ***B*** w pierwszym etapie

$p_2$ - prawdopodobieństwo otrzymania wyniku ***B'*** w pierwszym etapie

$q_1$, $q_3$ - prawdopodobieństwo warunkowe otrzymania wyniku ***A*** w drugim etapie

$q_2$, $q_4$ - prawdopodobieństwo warunkowe otrzymania wyniku ***A'*** w drugim etapie

$p_1 + p_2 = 0$ $\qquad q_1 + q_2 = 0$ $\qquad q_3 + q_4 = 0$

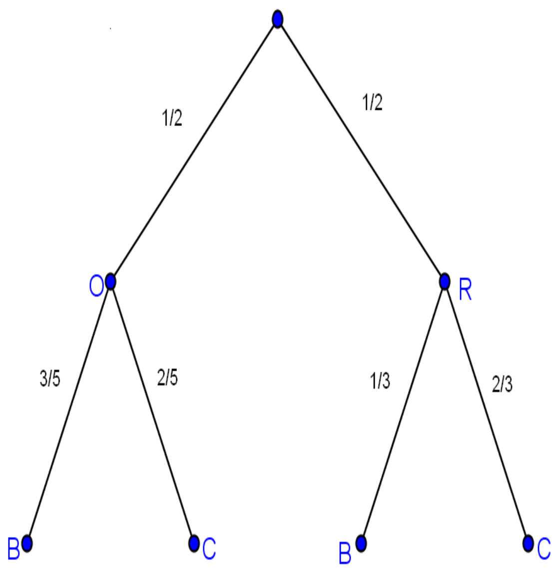
<u>Gałąź drzewa stochastycznego</u> – ciąg krawędzi prowadzących od początku drzewa do jednego z ostatnich jego wierzchołków.

**Reguła iloczynów**: Prawdopodobieństwo zdarzenia reprezentowanego przez jedną gałąź drzewa jest równe iloczynowi prawdopodobieństw przyporządkowanych krawędziom, z których składa się rozważana gałąź .

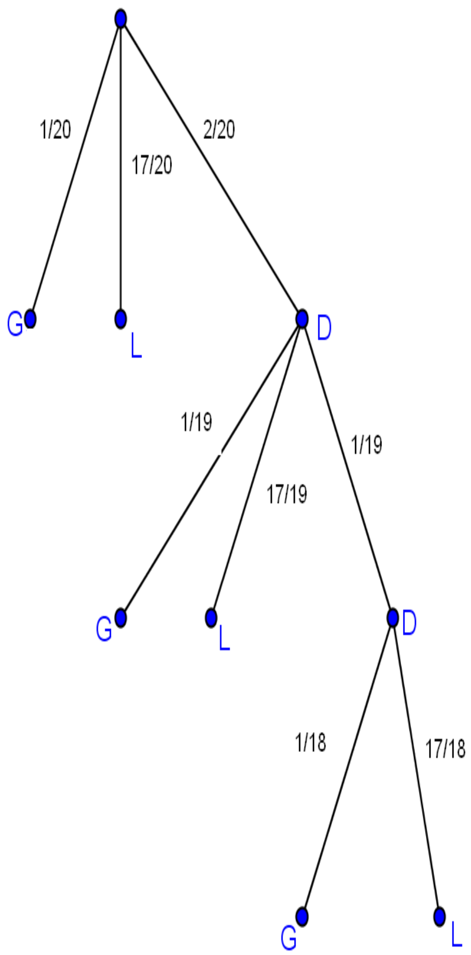
**Reguła sum** : Prawdopodobieństwo danego zdarzenia opisanego przez kilka gałęzi jest równe sumie prawdopodobieństw otrzymanych regułą iloczynów dla tych gałęzi.

<u>Przykład 12.4.1.</u> W urnie I są 3 kule białe i 2 czarne, W urnie II jest 1 kula biała i 2 czarne. Rzucamy monetą. Jeśli wypadnie orzeł to losujemy jedną kulę z urny I, jeśli reszkę to z urny II.

a) Oblicz prawdopodobieństwa wszystkich wyników doświadczenia.
b) Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

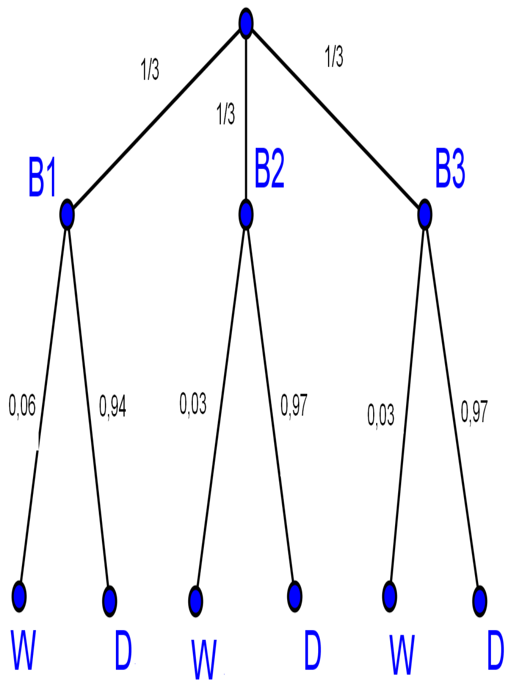
| Rozwiązanie | Komentarz |
|---|---|
|  | Doświadczenie ilustrujemy drzewem.<br><br>Pierwszy etap doświadczenia polega na rzucie monetą.<br>Prawdopodobieństwo , że wypadnie orzeł $P(O)=\frac{1}{2}$ .<br>Prawdopodobieństwo , że wypadnie reszka $P(R)=\frac{1}{2}$ .<br><br>Drugi etap doświadczenia polega na wylosowaniu kuli .<br>Jeśli wyrzuciliśmy orła , to losujemy kulę z urny I, w której są 3 kule białe i 2 czarne. Zatem prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej $P(B)=\frac{3}{5}$<br>oraz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej $P(C)=\frac{2}{5}$ .<br>Jeśli wyrzuciliśmy reszkę , to losujemy kulę z urny II, w której są 1 kule białe i 2 czarne. Zatem prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej $P(B)=\frac{1}{3}$<br>oraz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej $P(C)=\frac{2}{3}$ . |
| **a)**<br>$P(O,B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$<br>$P(O,C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{10}$<br>$P(R,B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$<br>$P(R,C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{6}$ | Obliczamy prawdopodobieństwa wszystkich wyników doświadczenia , stosując regułę iloczynów.<br>Drzewo składa się z 4 gałęzi, zatem mamy 4 zdarzenia elementarne. |
| **b)**<br>$P(A)=P(O,B)+P(R,B)=\frac{3}{10}+\frac{1}{6}=\frac{9}{30}+\frac{5}{30}=\frac{14}{30}$ | Obliczamy prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej $P(A)$ , stosując regułę sum.<br>Zdarzeniu polegającemu na wylosowaniu kuli białej sprzyjają dwa zdarzenia elementarne:<br>$(O,B),\ (R,B)$ |

<u>Przykład 12.4.2.</u> Wśród 20 losów jest los uprawniający do odebrania nagrody głównej oraz 2 losy uprawniające do dalszego losowania. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania nagrody głównej , jeśli kupimy jeden los.

| **Rozwiązanie** | **Komentarz** |
| --- | --- |
|  | Doświadczenie ilustrujemy drzewem.<br><br>Pierwszy etap doświadczenia polega na wylosowaniu losu. W tym doświadczeniu możemy wylosować:<br>nagrodę główną z prawdopodobieństwem $P(G)=\frac{1}{20}$,<br>los uprawniający do dalszego losowania z prawdopodobieństwem $P(D)=\frac{2}{20}$ lub los pusty z prawdopodobieństwem $P(L)=\frac{20-1-2}{20}=\frac{17}{20}$<br><br>Jeżeli wylosowaliśmy los uprawniający do dalszego losowania, to przechodzimy do drugiego etapu doświadczenia i znowu losujemy los tym razem spośród 19 losów.<br>W tym doświadczeniu możemy wylosować: nagrodę główną z prawdopodobieństwem $P(G)=\frac{1}{19}$,<br>los uprawniający do dalszego losowania z prawdopodobieństwem $P(D)=\frac{1}{19}$ lub los pusty z prawdopodobieństwem $P(L)=\frac{19-1-1}{19}=\frac{17}{19}$<br><br>Jeżeli znowu wylosowaliśmy los uprawniający do dalszego losowania, to przechodzimy do trzeciego etapu doświadczenia i znowu losujemy los tym razem spośród 18 losów.<br>W tym doświadczeniu możemy wylosować: nagrodę główną z prawdopodobieństwem $P(G)=\frac{1}{18}$,<br>lub los pusty z prawdopodobieństwem<br>$P(L)=\frac{18-1}{18}=\frac{17}{18}$ |
| $P(A)=P(G)+P(D,G)+P(D,D,G)=$<br>$=\frac{1}{20}+\frac{2}{20}\cdot\frac{1}{19}+\frac{2}{20}\cdot\frac{1}{19}\cdot\frac{1}{18}=$<br>$=\frac{342}{6840}+\frac{36}{6840}+\frac{2}{6840}=\frac{380}{6840}=\frac{19}{342}$ | Obliczamy prawdopodobieństwo wygrania nagrody głównej $P(A)$, stosując regułę iloczynów i sum.<br>Zdarzeniu polegającemu na wylosowaniu nagrody głównej sprzyjają trzy zdarzenia elementarne:<br>$(G),(D,G),(D,D,G)$ |

<u>Przykład 12.4.3.</u> Trzy brygady B1, B2, B3 produkują krzesła.

Wśród krzeseł wyprodukowanych przez brygadę B1 jest 6% wadliwych, a wśród wyprodukowanych przez B2 i B3 po 3%. W magazynie znajduje się po 100 krzeseł wytworzonych przez każdą z brygad. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrane z magazynu krzesło nie ma wad.

| Rozwiązanie | Komentarz |
|---|---|
| <br> | Doświadczenie ilustrujemy drzewem.<br><br>Pierwszy etap doświadczenia polega na określeniu brygady , która wyprodukowała wybrane krzesło.<br>Ponieważ każda z brygad wyprodukowała po 100 krzeseł , to<br>$P(B1)=\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$, $P(B2)=\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$, $P(B3)=\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$<br><br>Drugi etap doświadczenia polega na określeniu , czy wybrane krzesło jest dobre, czy wadliwe.<br>Jeśli krzesło wyprodukowała B1, to prawdopodobieństwo, że jest to krzesło wadliwe $P(W)=\frac{6}{100}$ , a że jest to krzesło dobre $P(D)=\frac{94}{100}$<br>Jeśli krzesło wyprodukowała B2, to prawdopodobieństwo, że jest to krzesło wadliwe $P(W)=\frac{3}{100}$ , a że jest to krzesło dobre $P(D)=\frac{97}{100}$<br>Jeśli krzesło wyprodukowała B3, to prawdopodobieństwo, że jest to krzesło wadliwe $P(W)=\frac{3}{100}$ , a że jest to krzesło dobre $P(D)=\frac{97}{100}$ |
| $P(A)=P(B1,D)+P(B2,D)+P(B3,D)=$<br>$=\frac{1}{3}\cdot\frac{94}{100}+\frac{1}{3}\cdot\frac{97}{100}+\frac{1}{3}\cdot\frac{97}{100}=\frac{288}{300}$ | Obliczamy prawdopodobieństwo wybrania krzesła dobrego $P(A)$, stosując regułę iloczynów i sum. Zdarzeniu polegającemu na wybraniu dobrego krzesła sprzyjają zdarzenia elementarne: $(B1,D),(B2,D),(B3,D)$ |

## ĆWICZENIA

Ćwiczenie 12.4.1. (3pkt.) Z urny zawierającej pięć kul białych i cztery czarne losujemy jedną kulę, a następnie zwracamy ją do urny i dokładamy dwie tego samego koloru. Następnie losujemy jedna kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo że będzie to kula biała?

**schemat oceniania**

| Numer odpowiedzi | Odpowiedź | Liczba punktów |
|---|---|---|
| 1 | Podanie prawdopodobieństwa wylosowania dwóch kul białych: $P(b,b)$ | 1 |
| 2 | Podanie prawdopodobieństwa wylosowania kuli czarnej i kuli białej: $P(cz,b)$ | 1 |
| 3 | Podanie prawdopodobieństwa wylosowania kuli białej w drugim losowaniu. | 1 |

Ćwiczenie 12.4.2. (1pkt.) Strzelec trafia do celu z prawdopodobieństwem 0,9. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy trzykrotnym strzelaniu strzelec trafi dokładnie dwa razy?

**schemat oceniania**

| Numer odpowiedzi | Odpowiedź | Liczba punktów |
|---|---|---|
| 1 | Podanie odpowiedzi. | 1 |

Ćwiczenie 12.4.3. (3pkt.) Na meczu koszykówki mężczyźni stanowią 20% kibiców, a 70% panów pomalowało twarze w barwy swojej drużyny. Aż 80% kobiet, które przyszły na mecz, się umalowało. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany kibic jest pomalowany.

**schemat oceniania**

| Numer odpowiedzi | Odpowiedź | Liczba punktów |
|---|---|---|
| 1 | Podanie prawdopodobieństwa , że wybrany kibic , to pomalowana kobieta. | 1 |
| 2 | Podanie prawdopodobieństwa , że wybrany kibic , to pomalowany mężczyzna . | 1 |
| 3 | Podanie prawdopodobieństwa , że wybrany kibic jest pomalowany. | 1 |